

ĐỀ THI MÔN TOÁN HỌC KỲ I — KHỐI 12

Thời gian: 90 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1: (4,0 điểm)

Cho hàm số $y = \frac{2}{x-1}$ (1), có đồ thị là (C)

- 1/ Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1).
- 2/ Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đi qua điểm P(3;1).
- 3/ $M(x_0, y_0)$ là một điểm bất kỳ thuộc (C), tiếp tuyến của (C) tại M cắt tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của (C) theo thứ tự tại A và B. Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C), tìm M để chu vi tam giác IAB nhỏ nhất.

Câu 2: (2 điểm)

- 1/ Giải phương trình: $2\log_5(3x-1) + 1 = \log_{\sqrt[3]{5}}(2x+1)$.
- 2/ Giải phương trình: $2^x + 3 = 3\sqrt{4^x + 1}$

Câu 3: (3,5 điểm)

Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=1, CC'=h$ ($h>0$). Gọi D là điểm đối xứng với A' qua B'.

- 1/ Tính thể tích khối đa diện $ABCD A'C'$ theo h.
- 2/ Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối tứ diện $BB'C'D$ theo h.
- 3/ Tìm h biết rằng góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng 60° .

Câu 4: (0,5 điểm)

1/ Dành cho các lớp: $12A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$

Cho 3 số dương x, y, z thỏa $x + y + z \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

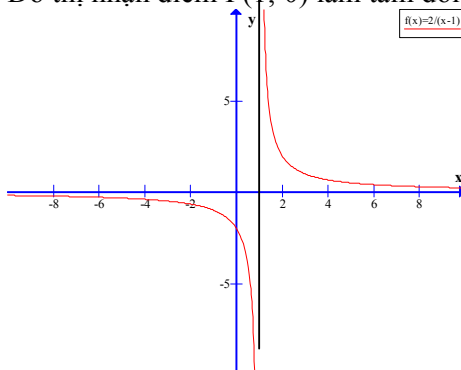
$$A = x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

2/ Dành cho các lớp: $12D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7$

Tìm m để phương trình $2^x + 3 = m\sqrt{4^x + 1}$ có nghiệm duy nhất

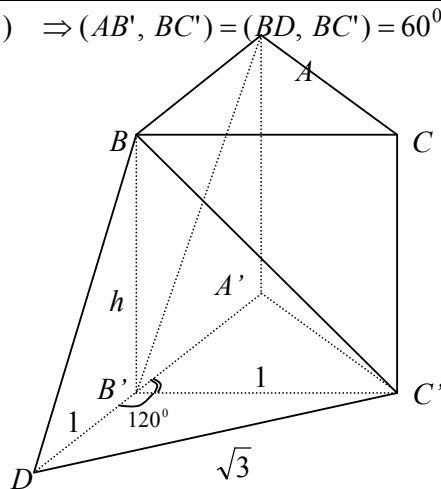
.....Hết.....

ĐÁP ÁN – THANG ĐIỂM

Câu	Đáp án	Điểm												
I	1) (2,5 điểm)													
(4 điểm)	TXĐ: $D = R \setminus \{1\}$	0,25												
	Sự biến thiên <div>▪ Chiều biến thiên: $y' = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$</div> <div>Suy ra hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.</div> <div>▪ Cực trị: hàm số không có cực trị</div>	0,50												
	<div>▪ Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$</div> <div>Suy ra đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là đường thẳng: $x = 1$</div> <div>Và một tiệm cận ngang là đường thẳng: $y = 0$</div>	0,50												
	<div>▪ Bảng biến thiên:</div> <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td colspan="2">-</td><td>-</td></tr><tr><td>y</td><td>0</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	1	$+\infty$	y'	-		-	y	0	$-\infty$	$+\infty$	0,25
x	$-\infty$	1	$+\infty$											
y'	-		-											
y	0	$-\infty$	$+\infty$											
	<div>▪ Đồ thị:</div> <div>Cắt trục tung tại điểm $(0; -2)$, đi qua điểm $(2; 2)$</div> <div>Đồ thị nhận điểm I $(1; 0)$ làm tâm đối xứng (là giao của hai đường tiệm cận)</div> <div></div>	0,50												
	2) (1 điểm) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm P(3, 1): Đường thẳng (d) qua P có hệ số góc k: $y = k(x-3) + 1$ <div>$(d) \text{ tiếp xúc } (C) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{x-1} = k(x-3) + 1 & (1) \\ \frac{-2}{(x-1)^2} = k & (2) \end{cases}$ có nghiệm</div> Thay (2) vào (1) :	0,50												

	$\frac{2}{x-1} = \frac{-2(x-3)}{(x-1)^2} + 1$ $\Leftrightarrow 2(x-1) = -2(x-3) + (x-1)^2$ $\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ <p>Thay vào (2) $\Rightarrow k = -\frac{1}{2}$</p> <p>Vậy phương trình tiếp tuyến đi qua P là:</p> $y = \frac{5}{2} - \frac{x}{2}$	0,50
	<p>3) $M_0(x_0, y_0) \in (C)$. Tiếp tuyến của (C) tại M cắt 2 đường tiệm cận tạo thành một tam giác có diện tích không phụ thuộc M.</p> <p>Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M:</p> $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ $\Leftrightarrow y = \frac{-2}{(x_0-1)^2}(x - x_0) + \frac{2}{x_0-1}$ $= \frac{-2}{(x_0-1)^2}x + \frac{4x_0-2}{(x_0-1)^2}$ <p>Giao điểm với tiệm cận đứng $x = 1$.</p> $x = 1 \Rightarrow y = \frac{4}{x_0-1} \Rightarrow A\left(1; \frac{4}{x_0-1}\right)$ <p>Giao điểm với tiệm cận ngang $y = 0$.</p> $y = 0 \Rightarrow x = 2x_0 - 1 \Rightarrow B(2x_0 - 1; 0)$ <p>Giao điểm hai đường tiệm cận: I(1, 0)</p> <p>Ta có :</p> $IA \cdot IB = y_A - y_I \cdot x_B - x_I = 8$ <p>Vậy: Chu vi</p> $\Delta IAB = IA + IB + AB = IA + IB + \sqrt{IA^2 + IB^2} \geq 2\sqrt{IA \cdot IB} + \sqrt{2IA \cdot IB}$ $= 4 + 4\sqrt{2}$ <p>Chu vi ΔIAB min $= 4 + 4\sqrt{2}$ khi:</p> $IA = IB \Rightarrow x_0 = 1 + \sqrt{2}; x_0 = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow M(1 + \sqrt{2}; \sqrt{2}); M(1 - \sqrt{2}; -\sqrt{2})$	0,25
Câu II	1) (1 điểm)	
	<p>1/ Điều kiện $x > \frac{1}{3}$. (*)</p> <p>Với đk trên, pt đã cho $\Leftrightarrow \log_5(3x-1)^2 + 1 = 3\log_5(2x+1)$</p>	

	$\Leftrightarrow \log_5 5(3x-1)^2 = \log_5 (2x+1)^3$ $\Leftrightarrow 5(3x-1)^2 = (2x+1)^3$	0,50
	$\Leftrightarrow 8x^3 - 33x^2 + 36x - 4 = 0$ $\Leftrightarrow (x-2)^2(8x-1) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{8} \end{cases}$ <p>Đối chiếu điều kiện (*), ta có nghiệm của pt là $x = 2$.</p>	0,50
	2) (1 điểm)	
	2/ Giải: Đặt $t = 2^x, t > 0$ phương trình có dạng : $t + 3 = 3\sqrt{t^2 + 1} \Leftrightarrow 8t^2 - 6t = 0$	0,50
	$\Rightarrow t = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \log_2 \frac{2}{3} = 1 - \log_2 3$ <p>Vậy ta có: $x = 1 - \log_2 3$</p>	0,50
III	3) (4 điểm).	
	1/ (1,5 điểm). Dựng hình lăng trụ đứng $D'AC.DA'C'$, $V_{ABCD A'C'} = V_{D'AC.DA'C'} - V_{D.D'BC}$	0,50
	<p>viết đúng công thức tính & tính đúng</p> $V_{ABCD A'C'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2.h - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot h = \frac{5h\sqrt{3}}{12} dvtt$	0,50 0,50
	<p>2/(1,5 điểm). Gọi M là trung điểm DC' O là điểm đối xứng với B' qua M, dễ thấy $DOC'B'$ là hình thoi và $OD = OB' = OC'$, qua O dựng $d \parallel BB'$ suy ra d là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác $DB'C'$. Mặt phẳng trung trực cạnh BB' cắt d tại I, dễ thấy I là tâm m/c.</p> <p>Gọi K là trung điểm BB' suy ra $OIKB'$ là hình chữ nhật, dẫn đến $R = IB' = \frac{\sqrt{h^2 + 4}}{2}$</p>	0,50 0,50 0,50
	<p>3/(0,5 điểm). Vì $BD \parallel AB'$ ($D \in A'B'$) $\Rightarrow (AB', BC') = (BD, BC') = 60^\circ$ $\Rightarrow \angle DBC' = 60^\circ$ hoặc $\angle DBC' = 120^\circ$. - Nếu $\angle DBC' = 60^\circ$ Vì lăng trụ đều nên $BB' \perp (A'B'C')$. áp dụng định lý Pitago và định lý cosin ta có $BD = BC' = \sqrt{h^2 + 1}$ và $DC' = \sqrt{3}$. Kết hợp $\angle DBC' = 60^\circ$ ta suy ra $\triangle BDC'$ đều. Do đó $h^2 + 1 = 3 \Leftrightarrow h = \sqrt{2}$.</p>	0,250 0,250



	<p>- Nếu $\angle DBC' = 120^\circ$ áp dụng định lý cosin cho $\triangle BDC'$ suy ra $h = 0$ (loại). Vậy $h = \sqrt{2}$. * <u>Chú ý</u>: - Nếu HS chỉ xét trường hợp góc 60° thì chỉ cho 0,5đ khi giải đúng.</p>										
IV.a	<p>• Cách 1: Theo BĐT Côsi: $1 \geq x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} > 0$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}$ Từ đó: $A \geq 3\sqrt[3]{xyz} + \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}$ Đặt: $t = \sqrt[3]{xyz}$, điều kiện: $0 < t \leq \frac{1}{3}$ Xét hàm số $f(t) = 3t + \frac{3}{t}$ với $0 < t \leq \frac{1}{3}$ $f'(t) = 3 - \frac{3}{t^2} = \frac{3(t^2 - 1)}{t^2} < 0, \forall t \in \left(0; \frac{1}{3}\right]$ Bảng biến thiên:</p> <table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td>t</td><td>0</td><td>$\frac{1}{3}$</td></tr> <tr> <td>f'(t)</td><td style="background-color: #cccccc;"></td><td style="background-color: #cccccc;"></td></tr> <tr> <td>f(t)</td><td style="background-color: #cccccc;"></td><td style="background-color: #cccccc;"></td></tr> </table> <p>Từ bảng biến thiên ta suy ra: $A \geq 10$. Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$ Vậy $A_{\min} = 10$ đạt được khi $x = y = z = \frac{1}{3}$. • Cách 2: Theo BĐT Côsi: $1 \geq x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{xyz}} \geq 3$ $x + \frac{1}{9x} \geq \frac{2}{3}, y + \frac{1}{9y} \geq \frac{2}{3}, z + \frac{1}{9z} \geq \frac{2}{3}$ Từ đó: $A = \left(x + \frac{1}{9x}\right) + \left(y + \frac{1}{9y}\right) + \left(z + \frac{1}{9z}\right) + \frac{8}{9}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 2 + \frac{8}{9} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} \geq 10$ Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$. Vậy $A_{\min} = 10$ đạt được khi $x = y = z = \frac{1}{3}$</p>	t	0	$\frac{1}{3}$	f'(t)			f(t)			0,50
t	0	$\frac{1}{3}$									
f'(t)											
f(t)											
IV.b	2) (0,5 điểm) – Ban cơ bản	0,5									
	<p>2/ Số nghiệm của $t + 3 = m\sqrt{t^2 + 1} \Leftrightarrow \frac{t+3}{\sqrt{t^2+1}} = m(1)$ là số giao điểm của đồ thị hàm số (C): $y = \frac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}$ với đường thẳng (d): $y=m$ Xét hàm số: $y = \frac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}$ xác định trên $D(0; +\infty)$</p>										

	<p>+ Đạo hàm: $y' = \frac{1-3t}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}; y' = 0 \Leftrightarrow 1-3t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$</p> <p>+ Giới hạn: $\lim y = 1, (t \rightarrow +\infty)$</p> <p>+ Bảng biến thiên: Từ bảng biến thiên suy ra: Với $1 < m < 3$ hoặc $m = \sqrt{10}$ phương trình có nghiệm duy nhất.</p>	0,50
	<p>Câu 4a, 4b làm đúng ra kết quả cuối cùng mới cho 0,5 điểm</p> <p>Các cách giải đúng khác cho điểm tối đa tương ứng với số điểm của câu đó.</p>	